1. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το διάστημα $[a,\beta]$, όπου $a<0<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_1, x_2, με $x_1 \neq x_2$, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

ii) υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_3 \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(x_3)=0$.

iii) Η εξίσωση $f(x)+f'(x)f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

iv) Η εξίσωση $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

i) Αφού η f έχει σύνολο τιμών $[a,\beta]$, παρουσιάζει ελάχιστη τιμή α, δηλαδή υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1)=a$ (1) και μέγιστη τιμή β, δηλαδή υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_2)=\beta$ (2). Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Άρα, $x_1 \neq x_2$.

ii) Έστω π.χ. $x_1<x_2$. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_3 \in (x_1,x_2)$ ώστε $f''(x_3)=0$.

iii) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+f'(x)f''(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ με:

$g(x_1)=f(x_1)+f'(x_1)f''(x_1)=a<0$ και $g(x_2)=f(x_2)+f'(x_2)f''(x_2)=\beta>0$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ με $g(\xi)=0$. Το ξ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.

iv) Η συνάρτηση $h(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με

$h'(x)=f''(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot\left[e^{f(x)}\right]'=e^{f(x)}\cdot\left[f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]$

$h(x_1)=f'(x_1)\cdot e^{f(x_1)}=0$ και $h(x_2)=f'(x_2)\cdot e^{f(x_2)}=0$

Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$, ώστε: $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+\left(f'(\xi)\right)^2=0$

2. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^5-5x+a,\ a\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, όταν $-4<a<4$.

ΛΥΣΗ

α) $f'(x)=5x^4-5$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-5=0 \Leftrightarrow 5x^4=5 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.
- Η f παρουσιάζει στο $x_1=-1$ τοπικό μέγιστο την τιμή:
- $f(-1)=(-1)^5-5(-1)+a=-1+5+a=a+4$
- Η f παρουσιάζει στο $x_2=1$ τοπικό ελάχιστο την τιμή: $f(1)=1^5-5\cdot 1+a=a-4$.

β) Στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-5x+a\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5\right)=-\infty$

$f(-1)=a+4$

Άρα, $f(\Delta_1)=(-\infty,a+4]$.

Στο $\Delta_2=(-1,1)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(-1)=a+4$ $\left(f \;\; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\right)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=a-4$ $\left(f \;\; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\right)$

Άρα, $f(\Delta_2)=(a-4,a+4)$.

Στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα $f(1)=a-4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-5x+a\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\right)=+\infty$

Άρα, $f(\Delta_3)=[a-4,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=(-\infty,+\infty)$

γ) $a-4<0<a+4$, άρα $0\in f(\Delta_1), 0\in f(\Delta_2)$ και $0\in f(\Delta_3)$

Η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα Δ_1,Δ_2 και Δ_3. Άρα, η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f στερείται ακροτάτων.

β) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

γ) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A\left(a,1\right)$ και $B\left(\beta,2\right)$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε: $5f^4(x)\cdot f'(x)+3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left[5f^4(x)+3f^2(x)+1\right]=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{5f^4(x)+3f^2(x)+1}>0$$

$\left(5f^4(x)+3f^2(x)+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\right)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα και στερείται ακροτάτων.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι «1–1», άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

Θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$, άρα: $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^5\left(f^{-1}(x)\right)+f^3\left(f^{-1}(x)\right)+f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x^5+x^3+x=f^{-1}(x)$$

Άρα, $f^{-1}(x)=x^5+x^3+x$.

γ) $f(a)<f(\beta)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}a<\beta$

$$a\le x\le\beta\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(a)\le f(x)\le f(\beta)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le 2$$

Άρα, $f(x)>0$, για κάθε $x\in\left[a,\beta\right]$.

$$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_1^2 u\cdot\left(5u^4+3u^2+1\right)du=\int_1^2\left(5u^5+3u^3+u\right)du=$$

$$=\left[\frac{5u^6}{6}+\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_1^2=\left(\frac{5\cdot2^6}{6}+\frac{3\cdot2^4}{4}+\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{5\cdot1^6}{6}+\frac{3\cdot1^4}{4}+\frac{1^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{320}{6}+12+2-\frac{5}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{783}{12}\tau.\mu.$$

4. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A\left(0,3\right)$ και ισχύει: $f'(x)\cdot f(x)-f'(x)=e^{2x}+e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^x+2$.

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=e+2$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $f'(x)\cdot f(x)-f'(x)=e^{2x}+e^{x} \Leftrightarrow \left[\dfrac{f^2(x)}{2}\right]'-f'(x)=\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)'+\left(e^{x}\right)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f^2(x)}{2}-f(x)\right]'=\left(\dfrac{e^{2x}}{2}+e^{x}\right)' \overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\Rightarrow} \dfrac{f^2(x)}{2}-f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}+e^{x}+c$

$\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^{x}+2c$

Για $x=0$: $f^2(0)-2f(0)=e^0+2e^0+2c \Leftrightarrow 3^2-2\cdot 3=1+2+2c \Leftrightarrow 3=3+2c \Leftrightarrow c=0$

Άρα, $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^{x} \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+\left(-e^{2x}-2e^{x}\right)=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot\left(-e^{2x}-2e^{x}\right)=4+4e^{2x}+8e^{x}=4\left(e^{2x}+2e^{x}+1\right)=4\left(e^{x}+1\right)^2=\left[2\left(e^{x}+1\right)\right]^2>0$

$f(x)=\dfrac{2\pm 2\left(e^{x}+1\right)}{2}=1\pm\left(e^{x}+1\right)$

Άρα, $f(x)=e^{x}+2$ ή $f(x)=-e^{x}$

Όμως, $f(0)=3$ επομένως $f(x)=e^{x}+2$

β) $f(x)=e^{x}+2$ και $f'(x)=e^{x}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως η f είναι «1-1», δηλαδή η f αντιστρέφεται.

$y=e^{x}+2 \Leftrightarrow e^{x}=y-2 \Leftrightarrow x=\ln\left(y-2\right),\ y>2$

Άρα, $f^{-1}(x)=\ln(x-2),\ \ x>2$

γ) $f^{-1}(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>1 \Leftrightarrow x>3$

$E=\int_e^{e+2}\left|f^{-1}(x)\right|dx=-\int_e^{3}f^{-1}(x)dx+\int_3^{e+2}f^{-1}(x)dx=$

$=-\int_e^{3}\ln(x-2)dx+\int_3^{e+2}\ln(x-2)dx=$

$=-\int_e^{3}\left(x-2\right)'\cdot\ln(x-2)dx+\int_3^{e+2}\left(x-2\right)'\cdot\ln(x-2)dx=$

$=-\left[\left(x-2\right)\cdot\ln(x-2)\right]_e^3+\int_e^3 1dx+\left[\left(x-2\right)\cdot\ln(x-2)\right]_3^{e+2}-\int_3^{e+2}1dx=$

$=-\left[0-\left(e-2\right)\cdot\ln\left(e-2\right)\right]+\left[x\right]_e^3+e-0-\left[x\right]_3^{e+2}=$

$=\left[\left(e-2\right)\cdot\ln\left(e-2\right)+4-e\right]\tau.\mu.$

5. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $\left[a,\beta\right]$, έχει σύνολο τιμών το $\left[-2,3\right]$ και $f(a)=2$, $f(\beta)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$.

β) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,β),

i) να αποδειχθεί ότι η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες.

ii) Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο (a,β), να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,\beta)$, τέτοιο ώστε: $f(\xi)\cdot\left[f'(\xi)+f^{2008}(\xi)\right]=0$.

iii) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2 \in (a,\beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{2f'(\xi_2)}=\frac{a-\beta}{2}.$$

ΛΥΣΗ

α) Από θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής και επειδή

$-2=f_{\min}<f(\beta)=1<f(a)=2<f_{\max}=3$, τότε υπάρχουν:

- $x_1 \in (a,\beta): f(x_1)=f_{\min}=-2$
- $x_2 \in (a,\beta): f(x_2)=f\max=3$

Θεώρημα Bolzano στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]\subseteq(a,\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta): f(x_0)=0$

β) i) τα x_1,x_2 είναι εσωτερικά σημεία του (a,β)

η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1,x_2

η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1,x_2

Θεώρημα Fermat: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Άρα, η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες στα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=f(x)\cdot\left[f'(x)+f^{2008}(x)\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]\subseteq(a,\beta)$
- $g(x_1)=f(x_1)\cdot\left[f'(x_1)+f^{2008}(x_1)\right]=-2\cdot\left[0+(-2)^{2008}\right]<0$

  $g(x_2)=f(x_2)\cdot\left[f'(x_2)+f^{2008}(x_2)\right]=3\cdot\left[0+3^{2008}\right]>0$

Θεώρημα Bolzano: $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)\cdot\left[f'(\xi)+f^{2008}(\xi)\right]=0$

iii) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα $\left[a, x_0\right]$ και $\left[x_0, \beta\right]$

- $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(a, x_0\right): f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \dfrac{0-2}{x_0 - a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(\xi_1)} = -\dfrac{x_0 - a}{2}$ (1)

- $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(x_0, \beta\right):$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{1-0}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{\beta - x_0}{2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \overset{(-)}{\Rightarrow} \frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{x_0 - a}{2} - \frac{\beta - x_0}{2} = \frac{a - \beta}{2}$$

6. f παραγωγίσιμη στο $\left(a, \beta\right)$ με $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = \lambda$.

α) Δείξτε ότι η $g(x) = \begin{cases} \to f(x), \ x \in \left(\alpha, \beta\right) \\ \to \lambda, \ x = a \ ή \ x = \beta \end{cases}$ είναι συνεχής.

β) $\exists \xi \in \left(a, \beta\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$

ΛΥΣΗ

α) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lambda \\ g(a) = \lambda \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = g(a),\ ά\rho\alpha\ g\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi ή\varsigma\ \sigma\tau o\ \alpha$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \beta^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = \lambda \\ g(\beta) = \lambda \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta^-} g(x) = g(\beta),\ ά\rho\alpha\ g\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi ή\varsigma\ \sigma\tau o\ \beta$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $\left(a, \beta\right)$, τότε g παραγωγίσιμη στο $\left(a, \beta\right) \Rightarrow g$ συνεχής στο $\left(a, \beta\right)$

$\underset{g\ \sigma\upsilon\nu\ \beta}{\overset{g\ \sigma\upsilon\nu\ a}{\Rightarrow}} g$ συνεχής στο $\left[a, \beta\right]$.

β) $\left.\begin{array}{l} g(a) = \lambda \\ g(\beta) = \lambda \end{array}\right| \Rightarrow g(a) = g(\beta),\ g'(x) = f'(x)\ \forall x \in \left(a, \beta\right)$

$$\left.\begin{array}{l} g\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi ή\varsigma\ \sigma\tau o\ \left[\alpha, \beta\right] \\ g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma ί\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \left(\alpha, \beta\right) \\ g(a) = g(\beta) \end{array}\right| \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists\ \tau o\upsilon\lambda ά\chi\iota\sigma\tau o\nu\ έ\nu\alpha\ \xi \in \left(a, \beta\right): g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

7. f, g παραγωγίσιμες και f, g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

$f'(x)f(x) + g'(x)g(x) = \left(f(x)g(x)\right)'$. Δείξτε ότι: $f(x) = g(x)$.

ΛΥΣΗ

Αφού f, g έχουν ένα κοινό σημείο, τότε: $\exists x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = g(x_0)$ (1)

$$f'(x)f(x) + g'(x)g(x) = \left(f(x)g(x)\right)'$$

$$\Rightarrow 2f'(x)f(x) + 2g'(x)g(x) = \left(2f(x)g(x)\right)'$$

$$\Rightarrow \left(f^2(x)\right)' + \left(g^2(x)\right)' = \left(2f(x)g(x)\right)'$$

$$\Rightarrow \left(f^2(x) + g^2(x)\right)' = \left(2f(x)g(x)\right)'$$

$$\Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 2f(x)g(x) + c$$

$$\overset{x=x_0}{\Rightarrow} f^2(x_0) + g^2(x_0) = 2f(x_0)g(x_0) + c$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} g^2(x_0) + g^2(x_0) = 2g(x_0)g(x_0) + c \Rightarrow c = 0$$

Άρα, $f^2(x) + g^2(x) = 2f(x)g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x) = 0$

$$\Rightarrow \left(f(x) - g(x)\right)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

8. f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $(2x-1)f(x) \neq (x^2 - x)f'(x)$ (1) για κάθε $x \in [0,1]$.

i) $f(0) \cdot f(1) \neq 0$

ii) Η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

i) $(1) \Rightarrow$ για $\left.\begin{array}{l} x = 0: -f(0) \neq 0 \Rightarrow f(0) \neq 0 \\ x = 1: f(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow f(0) \cdot f(1) \neq 0$

ii) Έστω ότι η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$, δηλαδή $f(x) \neq 0\ \forall x \in (0,1) \overset{(i)}{\Rightarrow} f(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$

$$(1) \Rightarrow \left(x^2 - x\right)' f(x) - \left(x^2 - x\right) f'(x) \neq 0 \overset{:f^2(x)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\left(x^2 - x\right)' f(x) - \left(x^2 - x\right) f'(x)}{f^2(x)} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2 - x}{f(x)}\right)' \neq 0$$

Θεωρώ $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{f(x)}$ παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x) = \left(\dfrac{x^2 - x}{f(x)}\right)' \neq 0$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow g(0) = g(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} g\ \sigma\upsilon\nu\ [0,1] \\ g\ \pi\alpha\rho\ (0,1) \\ g(0) = g(1) \end{array}\right| \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists x_0 \in (0,1): g'(x_0) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \acute{\alpha}\tau o\pi o$$

Άρα η $f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

9. Η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(1)=f(3)$ και $f\left(x^3\right)\geq f\left(3x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\,(1)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέτω: $h(x)=f\left(x^3\right)-f\left(3x\right)$

$h(1)=f(1)-f(3)\Rightarrow h(1)=0$

$h'(x)=f'\left(x^3\right)\cdot\left(x^3\right)'-f'(3x)\cdot(3x)'\Rightarrow h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-3f'(3x)$ (2)

Όμως, $h(x)\geq 0\Rightarrow h(x)\geq h(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Από Fermat $\Rightarrow h'(1)=0\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(1)=f'(3)$

$$\left.\begin{array}{l} f'\ \sigma\upsilon\nu\left[1,3\right] \\ f'\ \pi\alpha\rho\left(1,3\right) \\ f'(1)=f'(3) \end{array}\right| \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists\xi\in\left(1,3\right):\ f''(\xi)=0$$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

i) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

ii) Να δείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$.

β) $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

δ) $e(\pi-1)<\ln\pi^{\pi(e-1)}$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{2016(x-1)}{x}}=x$ στο $\left(1,+\infty\right)$.

iii) α) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)-x<0$ για κάθε $x\in\left(0,1\right)$

β) Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{xf^{-1}(x)-x^2}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1-\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x\ln x)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{1} = 0+1 = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{x-1} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x\ln x)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 1}{1} = +\infty$

ii) α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων .Επίσης είναι :

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$

Άρα η f είναι συνεχής και στα σημεία $x=0$ και $x=1$, οπότε είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x\ln x - x + 1)'}{((x-1)^2)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)' = \ldots = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$ **(1)**

Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x) = x - 1 - \ln x, x>0$,

$\phi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,έχουμε

$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 1$

$\phi'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x < 1$

$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x > 1$

Άρα η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$,δηλαδή για κάθε $x>0 : \phi(x) \geq \phi(1) \Leftrightarrow \phi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1-\ln x \geq 0$ ή $x \in (0,1)\cup(1,+\infty) : x - 1 - \ln x > 0$

Οπότε από την (1) προκύπτει $f'(x) > 0$ στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $f'(1) = \frac{1}{2} > 0$.Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

δ) $e < \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(e) < f(\pi) \Leftrightarrow \frac{e\ln e}{e-1} < \frac{\pi \ln \pi}{\pi - 1} \Leftrightarrow \frac{e}{e-1} < \frac{\ln \pi^{\pi}}{\pi - 1} \Leftrightarrow e(\pi - 1) < \ln \pi^{\pi(e-1)}$

ii) Η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$e^{\frac{2016(x-1)}{x}} = x \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \ln e^{\frac{2016(x-1)}{x}} = \ln x \Leftrightarrow \frac{2016(x-1)}{x} = \ln x \Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x-1} = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016 \quad , \ x>1$

$A_1 = (1,+\infty) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$ βλέπουμε ότι $2016 \in f(A_1) = (1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (1,+\infty)$ (μοναδικό λογω της μονοτονίας της f) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2016$.

iii) α) Αρκεί να δείξουμε για κάθε $x \in (0,1) : f^{-1}(x) - x < 0$

Έτσι: $f^{-1}(x)-x<0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)<x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x))<f(x) \Leftrightarrow x<f(x) \Leftrightarrow x<\dfrac{x\ln x}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{x\ln x}{x-1}<0 \Leftrightarrow x(1-\dfrac{\ln x}{x-1})<0 \Leftrightarrow x(\dfrac{x-1-\ln x}{x-1})<0 \Leftrightarrow \dfrac{xh(x)}{x-1}<0$ που ισχύει διότι για κάθε $x\in(0,1)$: $h(x)>0$, (ερώτημα) επίσης $x>0$, $x-1<0$.

iii) β) $L=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{xf^{-1}(x)-x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x(f^{-1}(x)-x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{1}{(f^{-1}(x)-x)}\right)$

• $\lim\limits_{x\to0^+}(f^{-1}(x)-x)=0$,

$f^{-1}(x)-x<0$ κοντά στο 0 από θετικές τιμές άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{(f^{-1}(x)-x)}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\underset{\text{οταν } x\to0^+ \text{ τοτε } u\to1^+}{\overset{u=\sqrt[9]{x+1}\Leftrightarrow u^9=x+1\Leftrightarrow u^9-1=x}{=}}\lim\limits_{u\to1^+}\dfrac{u-1}{u^9-1}=\lim\limits_{u\to1^+}\dfrac{u-1}{(u-1)(u^8+u^7+u^6+..+1)}=\lim\limits_{u\to1^+}\dfrac{1}{u^8+u^7+u^6+..+1}=\dfrac{1}{9}$

$L=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{1}{(f^{-1}(x)-x)}\right)=\dfrac{1}{9}\cdot(-\infty)=-\infty$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2e^{x-1}-\ln x$, $x>0$ και $g(x)=2x+2\ln\dfrac{2}{1+e^{x-1}}$

i) Να μελετήσετε τις f,g ως προς την κυρτότητα στο $(0,+\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

iii) Για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι $2e^{x-1}-2x\ge\ln\dfrac{4x}{(1+e^{x-1})^2}$

iv) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την εξίσωση $e^{x-1}=x+\ln\dfrac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}$

v) Να δείξετε ότι $\int_1^e(x^{2e^{x-1}-f(x)}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-f(x)}})dx=e^2-1$

ΛΥΣΗ

i) $f'(x)=\left(2e^{x-1}-\ln x\right)'=2e^{x-1}-\dfrac{1}{x}, f''(x)=\left(2e^{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)'=2e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

$g'(x)=\left(2x+2\ln\dfrac{2}{1+e^{x-1}}\right)'=...=\dfrac{2}{1+e^{x-1}}$

$g''(x)=\left(\dfrac{2}{1+e^{x-1}}\right)'=...=-\dfrac{2e^{x-1}}{(1+e^{x-1})^2}<0$ άρα η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$

ii) $f(1)=2e^{1-1}-\ln1=2$ **,** $f'(1)=2e^{1-1}-\dfrac{1}{1}=1$

$g(1)=2+2\ln\dfrac{2}{1+e^{1-1}}=2+2\ln1=2$, $g'(1)=\dfrac{2}{1+e^{1-1}}=1$

Δηλαδή $f(1)=g(1), f'(1)=g'(1)$ συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$,με εξίσωση $y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=x+1$

iii)Από το την κυρτότητα των f και g και την κοινή εφαπτομένη προκύπτει

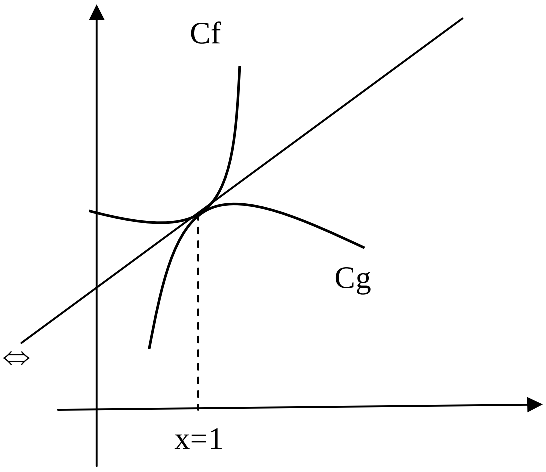
$f(x)\ge y\ge g(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ δηλαδή

$f(x)\ge g(x)$ με την ισότητα όταν $x=1$

Άρα $f(x)\ge g(x) \Leftrightarrow 2e^{x-1}-\ln x \ge 2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow$

$2e^{x-1}-2x \ge +2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}+\ln x \Leftrightarrow 2e^{x-1}-2x\ge +\ln\frac{4}{(1+e^{x-1})^2}+\ln x \Leftrightarrow$

$2e^{x-1}-2x\ge \ln\frac{4x}{(1+e^{x-1})^2}$



iv) $e^{x-1}=x+\ln\frac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow e^{x-1}=x+\ln\sqrt{x}+\ln\frac{2}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow 2e^{x-1}=2x+2\ln\sqrt{x}+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{x-1}=2x+\ln x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow 2e^{x-1}+\ln x=2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Από το σχήμα προκύπτει ότι x=1.

v) $I=\int_1^e (x^{2e^{x-1}-f(x)}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-f(x)}})dx=\int_1^e (x^{2e^{x-1}-2e^{x-1}+\ln x}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-2e^{x-1}+\ln x}})dx=\int_1^e (x^{\ln x}+e^{\sqrt{\ln x}})dx=$

$=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx \Leftrightarrow I=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx \quad (1)$

Θέτουμε $u=x^{\ln x}$, οπότε $u=x^{\ln x} \Leftrightarrow \ln u=\ln x^{\ln x} \Leftrightarrow \ln u=\ln^2 x \Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln u}}$,

$dx=(e^{\sqrt{\ln u}})'du$,

•x=1 τότε $u=1$

•x=e τότε $u=e$

Άρα

$\int_1^e x^{\ln x}dx=\int_1^e u(e^{\sqrt{\ln u}})'du=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e-\int_1^e e^{\sqrt{\ln u}}du$

Άρα η (1) παίρνει την μορφή:

$I=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e-\int_1^e e^{\sqrt{\ln u}}du+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e=e\cdot e^{\sqrt{\ln e}}-1e^{\sqrt{\ln 1}}=e^2-1$

12. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με f(0)=0, για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)}+2f'(x)=2\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x-\ln\dfrac{e^x+1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$e^{f(x)}+2f'(x)=2\Rightarrow 1+2f'(x)e^{-f(x)}=2e^{-f(x)}\Rightarrow 2e^{-f(x)}f'(x)+2e^{-f(x)}=1$

$\Rightarrow 2\left(e^{-f(x)}\right)'e^x+2e^{-f(x)}\left(e^x\right)'=e^x\Rightarrow\left(2e^{-f(x)}e^x\right)'=\left(e^x\right)'\Rightarrow 2e^{-f(x)}e^x=e^x+c\overset{x=0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2e^{-f(0)}e^0=e^0+c\Rightarrow c=0$

Άρα $2e^{-f(x)}e^x=e^x+1\Rightarrow\dfrac{2}{e^{f(x)}}=1+e^{-x}\Rightarrow\dfrac{e^{f(x)}}{2}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}\Rightarrow e^{f(x)}=2\dfrac{e^x}{1+e^x}\Rightarrow f(x)=\ln\dfrac{2e^x}{1+e^x}$

13. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με f(0)=0, f΄(0)=1, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)=2e^{x-f(x)}\left(1+x-xf'(x)\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

ΛΥΣΗ

$f''(x)=2e^{x-f(x)}\left(1+x\left(1-f'(x)\right)\right)\Rightarrow f''(x)=2e^{x-f(x)}\left(1+x\left(x-f(x)\right)'\right)\quad\left(h(x)=x-f(x)\right)$

$f''(x)=2e^{h(x)}\left(1+xh'(x)\right)\Rightarrow f''(x)=2e^{h(x)}\left(x\right)'+2x\left(e^{h(x)}\right)'\Rightarrow f''(x)=\left(2e^{h(x)}\cdot x\right)'$

$\Rightarrow f'(x)=2e^{h(x)}x+c\overset{x=0}{\Rightarrow}1=2e^0\cdot 0+c\Rightarrow c=1$

$\Rightarrow f'(x)=2e^{h(x)}x+1\Rightarrow f'(x)-1=2e^{h(x)}\Rightarrow h'(x)=2e^{h(x)}x\Rightarrow\left(e^{-h(x)}\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow$ ....